Infos de fin du semestre :

Forum : - Pas de support entre 17.12 & 01.01.
- Reprise du support 02.01 - 09.01

Corrigé Vidéo de l'examen de l'année passée : - QCM filmée.
Manque : VF + montage. J'espère avoir le temps...

RàQ finale en présentiel : Vendredi 9 janvier dès 14h. Organisé comme des exos. On utilisera TurnoClase

Fin du cours : Entre ajd & lundi, fin de la matière du cours.
On partira ensuite en mode révisions

~~2024~~-2025 2023-2024 2022-2023 2021-2022

Décomposition en éléments simple : factorisation du dénominateur

$$\frac{1}{(x-a)^n} \to \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-a)^2} + \dots + \frac{?}{(x-a)^n}$$

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} \longrightarrow \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

⚠ $b^2-4ac<0$

Rappel : $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$, $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

Exemple 9.22 :

$$\cos^n(x)\cdot\sin^m(x) \leadsto \cos(\alpha x) + \sin(\beta x)$$

(ii) Calculer $\int_0^{\pi/4} \cos^2(x)\sin^2(x)\,dx$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \Rightarrow \cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \Rightarrow \sin^2(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 = \frac{e^{2ix}-2+e^{2ix}}{-4}$$

$$\Rightarrow \cos^2(x)\sin^2(x) = \frac{e^{2ix}+2+e^{-2ix}}{4}\;\frac{e^{2ix}-2+e^{-2ix}}{-4}$$

$$= \frac{e^{i4x}-2e^{i2x}+1+2e^{i2x}-4+2e^{-i2x}+1-2e^{-i2x}+e^{-i4x}}{-16}$$

$$= -\frac{1}{8}\,\frac{e^{i4x}+e^{-i4x}}{2}+\frac{1}{8} = \frac{1}{8}\left(1-\cos(4x)\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/4} \cos^2(x)\sin^2(x)dx = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/4} 1-\cos(4x)dx = \frac{1}{8}\Big[x - \sin(4x)\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi}{32} - \frac{1}{8}\sin(\pi) - 0 + \frac{\sin(0)}{8} = \frac{\pi}{32}$$

(iii) $\int_0^{\pi/3} \sin^5(x)dx =$

$$\sin(x)^5 = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{2^5 i^5}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)^5$$

$$= \frac{1}{32i}\Bigg(e^{i5x} - \binom{5}{1}e^{i4x}e^{-ix} + \binom{5}{2}e^{i3x}e^{-i2x} - \binom{5}{3}e^{i2x}e^{-i3x}$$

$$+ \binom{5}{4}e^{ix}e^{-i4x} - e^{-i5x}\Bigg)$$

$$= \frac{1}{32i}\left(e^{i5x} - e^{-i5x} - 5e^{i3x} + 5e^{-i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\underbrace{\frac{e^{i5x} - e^{-i5x}}{2i}}_{\sin(5x)} - 5\underbrace{\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i}}_{\sin(3x)} + 10\underbrace{\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}_{\sin(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\right)$$

§9.4 Intégrale généralisée

Définition 9.23 (Intégrale généralisée de type I)

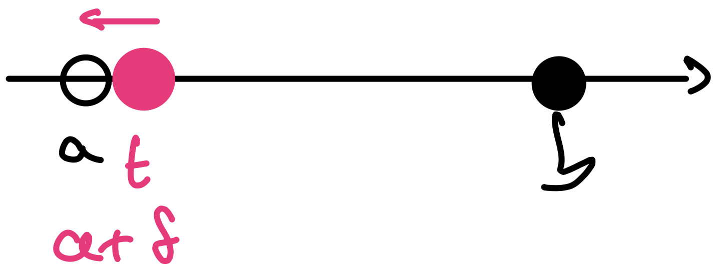
Soient $a<b$

(i) soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ continue

L'intégrale généralisée de f sur $]a,b]$ est

$$\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b} f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \int_{t}^{b} f(x)\,dx$$

si la limite existe



(ii) Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ continue. L'intégrale généralisée de f sur $[a,b[$ est $\int_a^{b^-} f(x)\,dx := \lim_{\delta \to 0^+} \int_a^{b-\delta} f(x)\,dx$

$= \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$ si la limite existe

(iii) Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ continue tq $\exists\, c \in]a,b[$ avec $\int_{a^+}^{c} f(x)\,dx$ et $\int_c^{b^-} f(x)\,dx$ existent. Alors, l'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$ est

$\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx = \lim_{\delta_1 \to 0^+} \lim_{\delta_2 \to 0^+} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)\,dx = \lim_{t \to a^+} \lim_{s \to b^-} \int_t^s f(x)\,dx$

(iv) Dans les points ci-dessus, si une limite n'existe pas, on dit que l'intégrale généralisée diverge

Remarque 9.24

(i) L'hypothèse $\exists\, c \in]a,b[$ tq $\int_{a^+}^{c} f(x)dx$ et $\int_{c}^{b^-} f(x)dx$ existent est équivalente à

$$\forall \tilde{c} \in]a,b[, \quad \int_{a^+}^{\tilde{c}} f(x)dx \text{ et } \int_{\tilde{c}}^{b^-} f(x)dx \text{ existent}$$

En effet

$$\overbrace{\int_{a^+}^{\tilde{c}} f(x)dx}^{?} = \overbrace{\int_{a^+}^{c} f(x)dx}^{?} + \overbrace{\int_{c}^{\tilde{c}} f(x)dx}^{\text{existe / converge.}}$$

$$\underbrace{\int_{\tilde{c}}^{b^-} f(x)dx}_{?} = \underbrace{\int_{c}^{b^-} f(x)dx}_{?} + \underbrace{\int_{\tilde{c}}^{c} f(x)dx}$$

(ii) Pourquoi $\lim_{\delta_1 \to 0^+} \lim_{\delta_2 \to 0^+} \int_{a+\delta_1}^{b-\delta_2} f(x)\,dx$

et pas $\lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)\,dx$

$\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-1}\,dx$ existe : $\lim_{\delta \to 0^+} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{x}{x^2-1}\,dx = 0$ impaire.

$\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2-1}\,dx \stackrel{?}{=} \lim_{\delta_1 \to 0^+} \lim_{\delta_2 \to 0^+} \int_{-1+\delta_1}^{1-\delta_2} \frac{x}{x^2-1}\,dx = \lim_{\delta_1 \to 0^+} +\infty = +\infty$

Rappel

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^m$

$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \neq \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty}$

$\neq \lim_{n=m\to\infty} \neq$

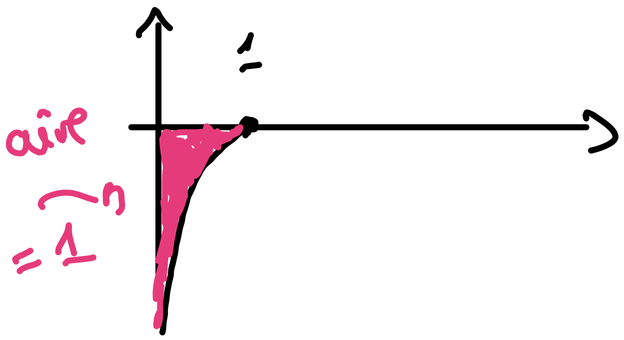
<u>Réciproque</u> : Si on teste $\int_{a^+}^{c} f(x)\,dx$ ✓ existe, $\int_{c}^{b^-} f(x)\,dx$ ✓ existe

Alors, $\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx = \int_{a^+}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b^-} f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_{a+\delta}^{b-\delta} f(x)\,dx$

Exemple 9.25 (i) Calculons $\int_{0^+}^{1} \log(x)\,dx$

$$\lim_{\delta \to 0^+} \int_{\delta}^{1} \log(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} \Big[x\log(x) - x \Big]_{\delta}^{1}$$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \Big[1\cdot\underbrace{\log(1)}_{=0} - 1 \underbrace{- \delta\log(\delta)}_{\to 0} + \underbrace{\delta}_{\to 0} \Big] = -1$$



(ii) Considérons $\int_{-1^+}^{1^-} \frac{x}{1-x^2}\,dx$

$C = 0$

$$\int_0^{1^-} \frac{x}{1-x^2}\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_0^{1-\delta} \frac{x}{1-x^2}\,dx = \lim_{\delta\to 0^+} \left[-\frac{1}{2}\log|1-x^2|\right]_0^{1-\delta}$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+} -\frac{1}{2}\log\left(1-(1-\delta)^2\right) + \frac{1}{2}\underbrace{\log(1)}_{=0}$$

$$= \lim_{\delta\to 0^+} -\frac{1}{2}\underbrace{\log(\underbrace{2\delta-\delta^2}_{\to 0^+})}_{\to -\infty} = +\infty$$

$$\int_{-1^+}^{0} \frac{x}{1-x^2}\,dx = -\infty$$

$$\Rightarrow \int_{-1^+}^{1^-} \frac{x}{1-x^2}\,dx \quad \text{diverge.}$$

Définition 9.26 (Intégrale généralisée de type II)

Soit $a<b$.

(i) Soit $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ continue. L'*intégrale généralisée de f* sur $]-\infty, b]$ est

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{M \to +\infty} \int_{-M}^{b} f(x)\,dx = \lim_{T \to -\infty} \int_{T}^{b} f(x)\,dx$$

si la limite existe

(ii) Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue. L'*intégrale généralisée de f* sur $[a, +\infty[$ est

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)\,dx$$ si la limite existe.

(iii) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue tq $\exists\, c \in \mathbb{R}$ avec

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_c^{+\infty} f(x)\,dx \quad \text{existent}$$

L'<u>intégrale généralisée de f sur $\mathbb{R}$</u> est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{M_1\to+\infty} \lim_{M_2\to+\infty} \int_{-M_1}^{M_2} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{M\to+\infty} \lim_{T\to-\infty} \int_T^M f(x)\,dx$$

(iv) Dans les trois points ci-dessus si une limite n'existe pas, l'intégrale généralisée diverge.

<u>Définition 9.2.8</u> (Intégrales généralisée de type $\overline{\text{IV}}$)

Soient $a<b$.

(i) Soit $f :]a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue tq $\exists c \in]a,+\infty[$ avec $\int_{a^+}^{c} f(x)dx$ et $\int_{c}^{+\infty} f(x)dx$ existent.

L'intégrale généralisée de f sur $]a,+\infty[$ est

$$\int_{a^+}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0^+} \lim_{M \to +\infty} \int_{a+\delta}^{M} f(x)dx$$

(ii) Soit $f :]-\infty, b[\to \mathbb{R}$ continue tq $\exists c \in]-\infty, b[$ avec $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ et $\int_{c}^{b^-} f(x)dx$ existent.

Alors, l'<u>intégrale généralisée de f</u> sur $]-\infty, -b[$ est

$$\int_{-\infty}^{b^-} f(x)dx = \lim_{\delta \to 0^+} \lim_{M \to +\infty} \int_{-M}^{b-\delta} f(x)dx$$

$$= \lim_{t \to b^-} \lim_{T \to -\infty} \int_{T}^{t} f(x)dx$$

(iii) Dans les deux points ci-dessus si une limite n'existe pas, l'intégrale généralisée diverge.

<u>Exemple 9.30</u> : (i) Soit $\alpha > 0$, $f_\alpha :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$. Pour quels α $\int_{0^+}^{1} f_\alpha(x)dx$ converge.

<u>Cas 1</u> $\alpha \neq 1$.

$$\int_{0^+}^{1} f_\alpha(x)dx = \lim_{\delta \to 0^+} \int_\delta^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\delta \to 0^+} \left[\frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right]_\delta^1$$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{\delta^{\alpha-1}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 1 \\ \frac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

Cas 2 : $\alpha = 1$

$$\int_{0^+}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta \to 0^+} \left[\log x\right]_{\delta}^{1} = \lim_{\delta \to 0^+} -\log(\delta) = +\infty.$$

Conclusion $\int_{0^+}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge si et seulement si $\alpha < 1$ et elle vaut alors, $\frac{1}{1-\alpha}$

(ii) Soit $\alpha > 0$, $f_\alpha : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ défini par $f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha}$

Pour quels α, $\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ existe ?

Cas 1 : $\alpha \neq 1$

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M \to \infty} \int_{1}^{M} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{M \to \infty} \left[\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{x^{\alpha-1}}\right]_{1}^{M}$$

$$= \lim_{M \to +\infty} \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{M^{\alpha-1}} + \frac{1}{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

<u>Cas 2</u> : $\alpha = 1$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{M \to +\infty} \int_1^M \frac{1}{x} dx = \lim_{M \to +\infty} \Big[\log(x)\Big]_1^M = \lim_{M \to \infty} \log(M) = +\infty$$

Conclusion : $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ et vaut alors $\frac{1}{\alpha-1}$

$\int_{0^+}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ diverge $\forall \alpha$